

Foglio 4 - Soluzioni,

ESERCIZIO 1

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\vec{F} = z \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} + (x-2)^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

lungo la curva γ , di supporto

$$[\gamma] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4x, x - z = 2, y \geq 1\}.$$

percorsa in modo che il suo versore tangente T in $P = (2, 2, 0)$ verifichi

$$\langle T_P, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle < 0.$$

F può descrivere un campo elettrostatico?

Soluzione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x \leadsto (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4 \longrightarrow \text{sfera raggio 2, centro } (2, 0, 0)$$

$$\text{Intersechiamo: } \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x - z = 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z^2/2 + y^2/4 = 1 \longrightarrow \text{cilindro base ellittica, asse } x \\ x = 2 + z \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Parametizziamo l'intersezione $\{z^2/2 + y^2/4 = 1\} \cap \{x = 2 + z\}$ tramite una coord. angolare.

$$\begin{cases} y(\theta) = 2 \cos \theta \\ z(\theta) = \sqrt{2} \sin \theta \\ x(\theta) = 2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

Aggiungiamo poi la condizione $y \geq 1$

$$y(\theta) = 2\cos\theta \geq 1 \iff \cos\theta \geq 1/2 \iff \theta \in [-\pi/3, \pi/3]$$

Dunque, la funzione

$$\eta: [-\pi/3, \pi/3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \longmapsto (2 + \sqrt{2}\sin\theta, 2\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$$

parametrizza il supporto di γ , come curva non orientata.

Vogliamo tuttavia che il supporto di γ sia percorso in un senso preciso.

Verifichiamo se la parametrizzazione trovata può funzionare.

$$\bullet \eta'(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, -2\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta)$$

$$\bullet \eta(0) = (2, 2, 0), \eta'(0) = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \langle \eta'(0), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \sqrt{2} > 0.$$

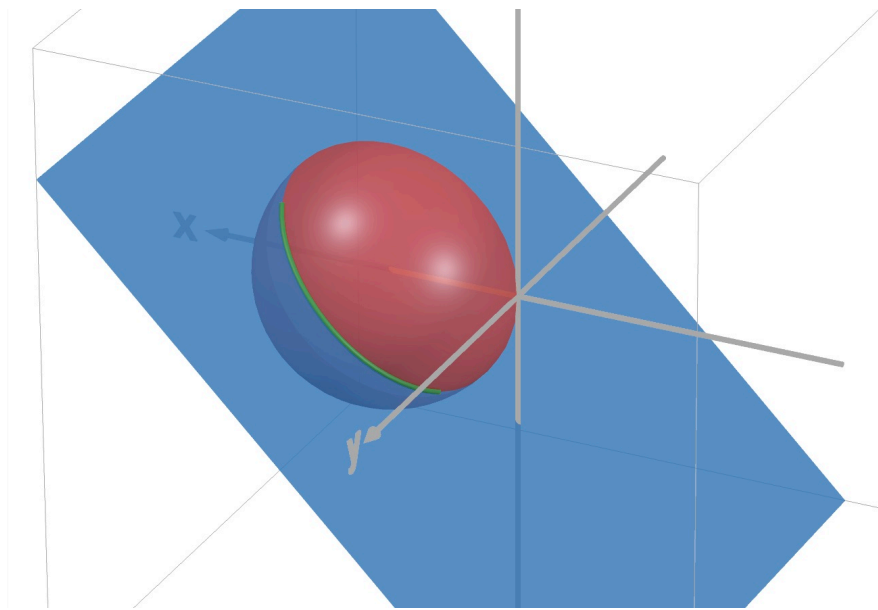
$$\rightsquigarrow \bullet \left\langle \frac{\eta'(0)}{\|\eta'(0)\|}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle T_P, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle > 0$$

La condizione imposta nell'esercizio **non** è rispettata.

Dobbiamo **invertire** il verso di percorrenza. Riassumendo, una param. corretta è data da:

$$\gamma(\theta) := \eta(-\theta) = (2 - \sqrt{2}\sin\theta, 2\cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta), \quad \theta \in [-\pi/3, \pi/3]$$

Per finire, ci serve $\gamma'(\theta) = (-\sqrt{2}\cos\theta, -2\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta)$.



$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \langle \vec{F}(r(\theta)), r'(\theta) \rangle d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta \\ 4 \cos^2 \theta \\ 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \theta \\ -2 \sin \theta \\ -\sqrt{2} \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\underbrace{2 \sin \theta \cos \theta}_{\text{dispari}} - \underbrace{8 \cos^2 \theta \sin \theta}_{\text{dispari}} - \underbrace{2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta}_{\text{pari}}) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/3} -2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{3} [\sin^3 \theta]_0^{\pi/3} = -\frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

- Il campo non è elettrostatico. In particolare, non è irrotazionale.
 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$ e $\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y \neq 0$.

ESERCIZIO 2

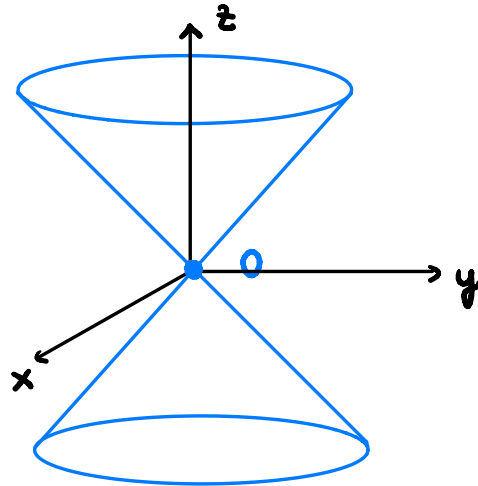
Sia $n \in \mathbb{N}$ e $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq x^2 + y^2, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Calcolare

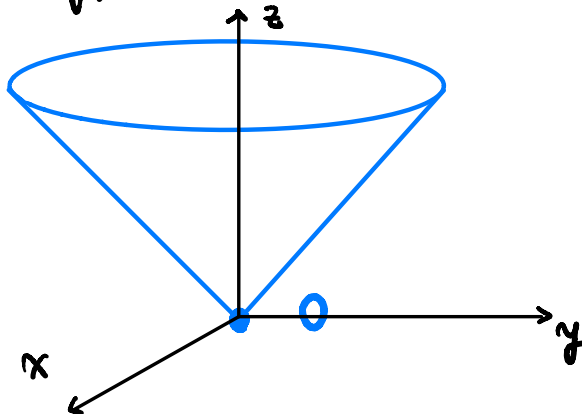
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2)^n dx dy dz \right)$$

Soluzione

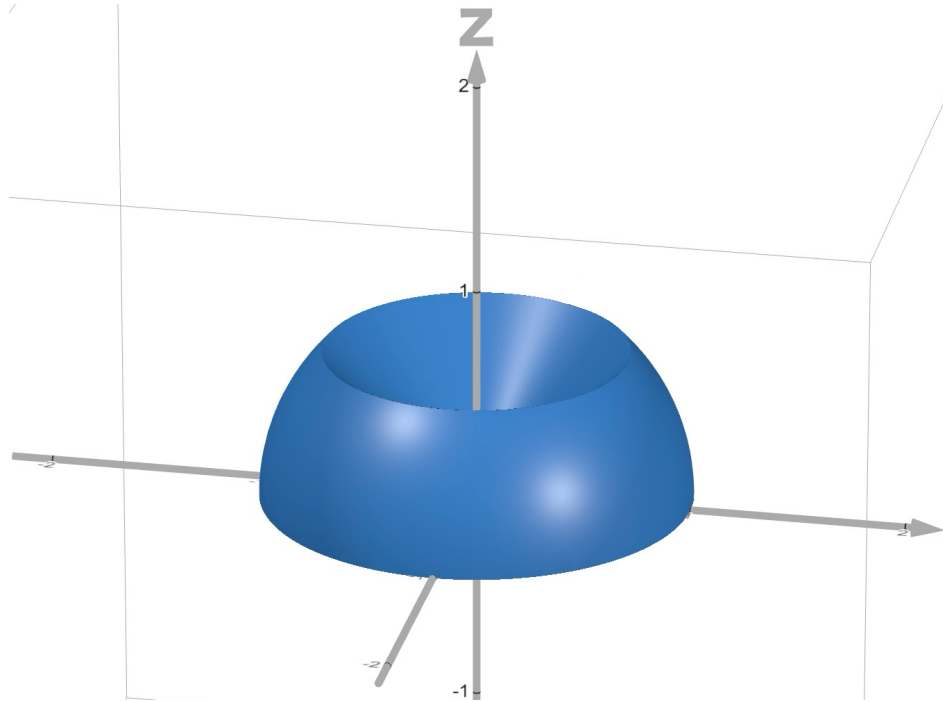
$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ "doppio" cono, con vertice in $(0, 0, 0)$



Poiché $z \geq 0$, possiamo prendere $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè:



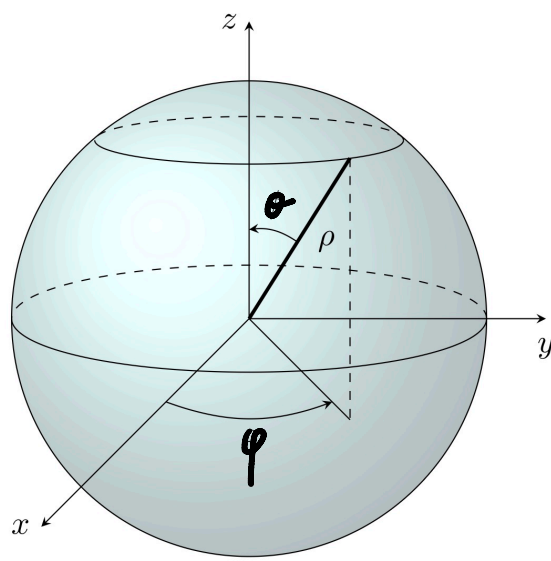
La disuguaglianza $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ si traduce in: " $\mathbb{R}^3$ a cui togliamo il cono "pieno", il cui bordo ha eq. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Infine, intersecando con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, otteniamo la semisfera nel semispazio $\{z \geq 0\}$, a cui è stato rimosso il cono appena citato.



La semisfera curva in figura è il nostro dominio A .

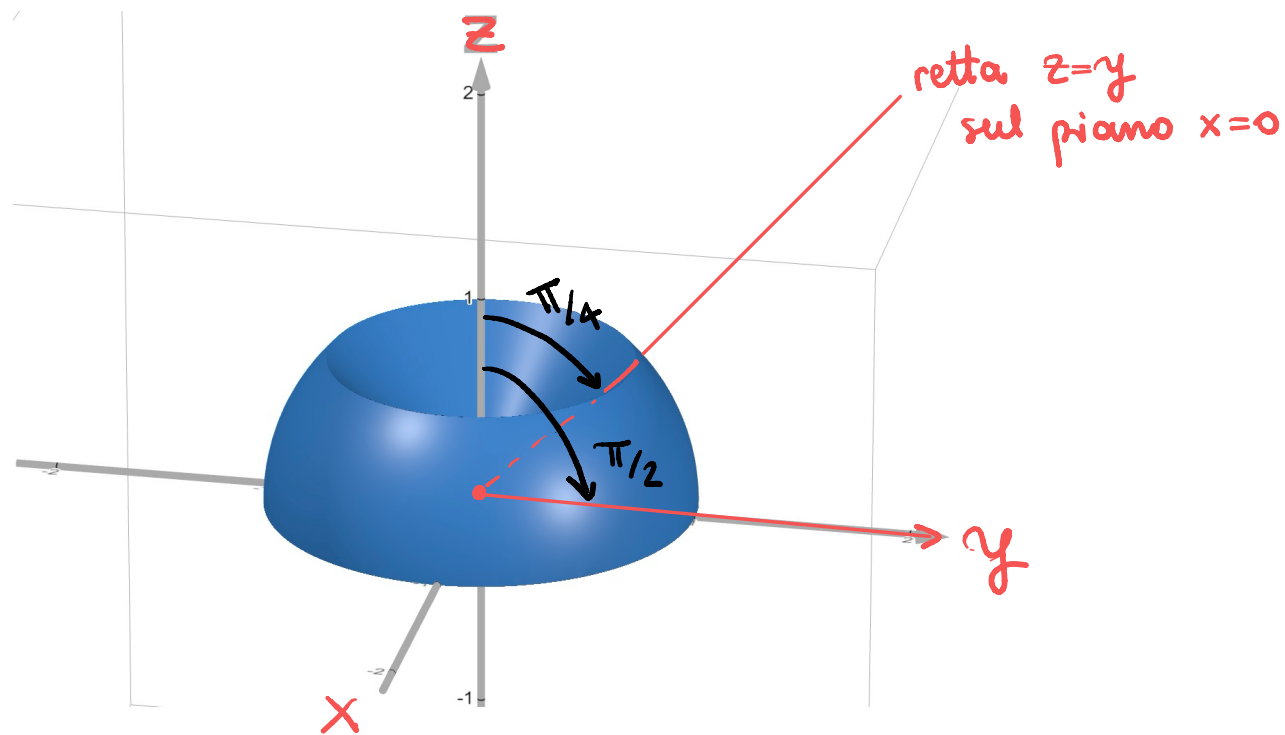
Vogliamo ora parametrizzare A . Lavoriamo in coordinate sferiche

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi].$$

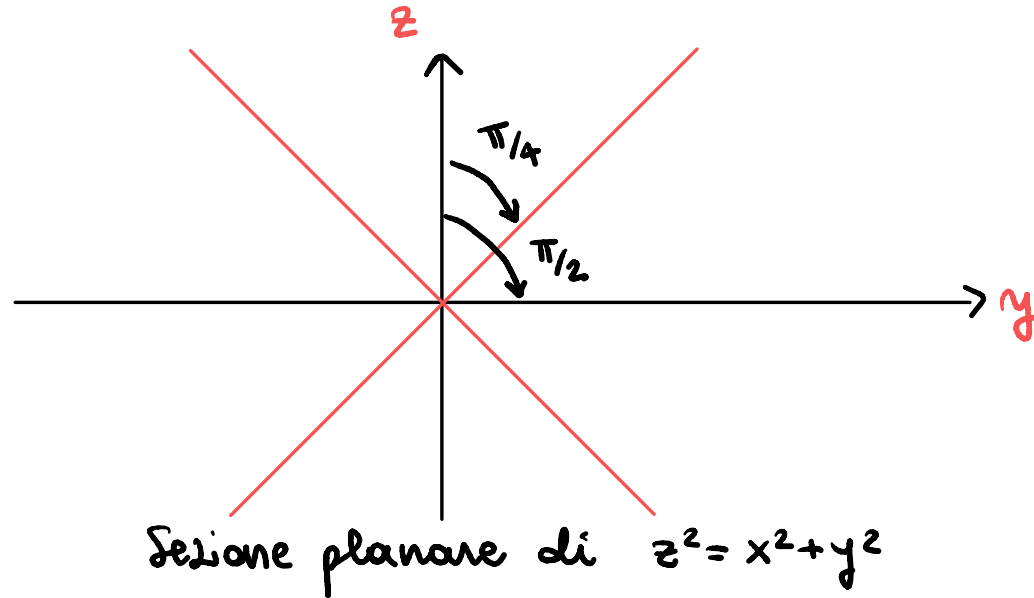


Chiaramente, per $A, \rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Ci serve trovare il bound su θ che descrive la "rimozione" del cono.



Senza conti : il cono $z^2 = x^2 + y^2$, ristretto al piano zy (i.e. $x=0$) è delimitato dalle rette $z = \pm y$. Per simmetria, la cosa è analoga se consideriamo qualsiasi piano passante per l'origine e $\perp$ al piano xy . Segue immediatamente che $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$.



Esplicitamente: lavorando in sfere:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{z^2 \leq x^2 + y^2}_{\text{①}} \underbrace{, z \geq 0}_{\text{②}} \underbrace{, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{③}}\}$$

$$\text{① } p^2 \cos^2 \theta \leq p^2 \sin^2 \theta \quad \text{③ } 0 \leq p \leq 1$$

$$\text{② } p \cos \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{① } \tan \theta \geq 1 \cup \{\theta = \pi/2\} \rightarrow \theta \in [\pi/4, \pi/2] \\ \text{② } \theta \in [0, \pi/2] \end{cases} \quad \rightsquigarrow \theta \in [\pi/4, \pi/2]$$

Dunque A , in coordinate sferiche, ha descrizione

$$\tilde{A} = \{(p, \varphi, \theta) \mid p \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\pi/4, \pi/2]\}.$$

Infine, notiamo che [calcolarlo almeno una volta nella vita!]

$$|\det J_T(p, \varphi, \theta)| = p^2 \sin \theta$$

dunque $dx dy dz = p^2 \sin \theta dp d\varphi d\theta$

Finally:

$$\begin{aligned} n \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2)^n dx dy dz &= n \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 p^{2+2n} dp \\ &= \frac{n\sqrt{2}\pi}{2n+3} \end{aligned}$$

Pertanto: $\frac{n\sqrt{2}\pi}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

OSS Provate a calcolare

$$\iiint_A \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^n \right) dx dy dz.$$

Noterete che $\iiint_A \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx dy dz = 0$ (dove abbiamo posto $f_n := n(x^2 + y^2 + z^2)^n$)

Eppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} \iiint_A f_n(x) dx dy dz \neq 0$!!!

In generale:  VIETATO SCAMBIARE LIMITE E INTEGRALE

Vedrete che, tuttavia, in particolari condizioni ciò è possibile, se se f_n converge al suo limite in maniera **uniforme**. Nel nostro caso, ciò non accade. Sarà tutto più chiaro tra qualche settimana. 😊

ESERCIZIO 3

Calcolare il centro di massa di

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0\}$$

avente densità di massa $\delta(x, y, z) = x$.

Soluzione

Il centro di massa $\bar{x}$ dato da $CM = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$ con:

$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{\text{massa}(S)} \cdot \int_S x \delta(x, y, z) d\sigma \\ y_{cm} = \frac{1}{\text{massa}(S)} \cdot \int_S y \delta(x, y, z) d\sigma \\ z_{cm} = \frac{1}{\text{massa}(S)} \cdot \int_S z \delta(x, y, z) d\sigma \end{cases}$$

Poniamo da

$$\text{massa}(S) = \int_S \delta d\sigma$$

Troviamo una param. di S usando le coordinate sferiche

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Nel nostro caso:

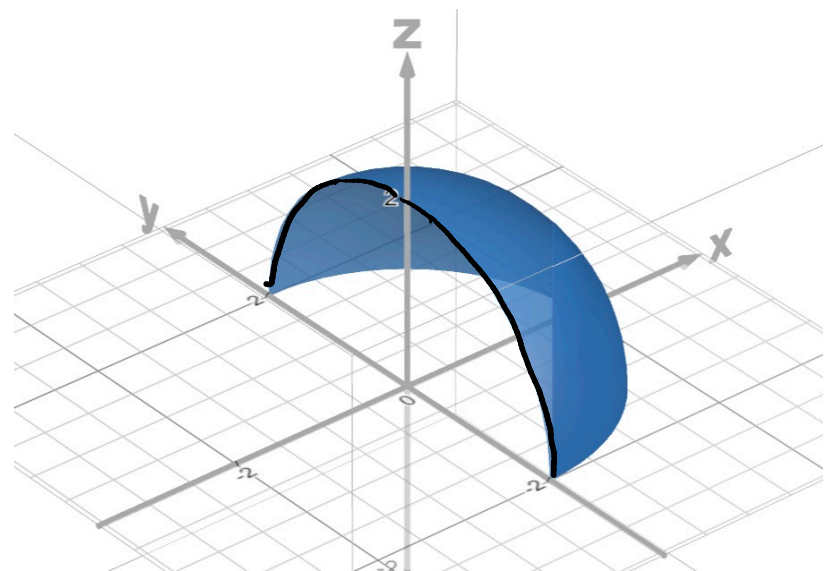
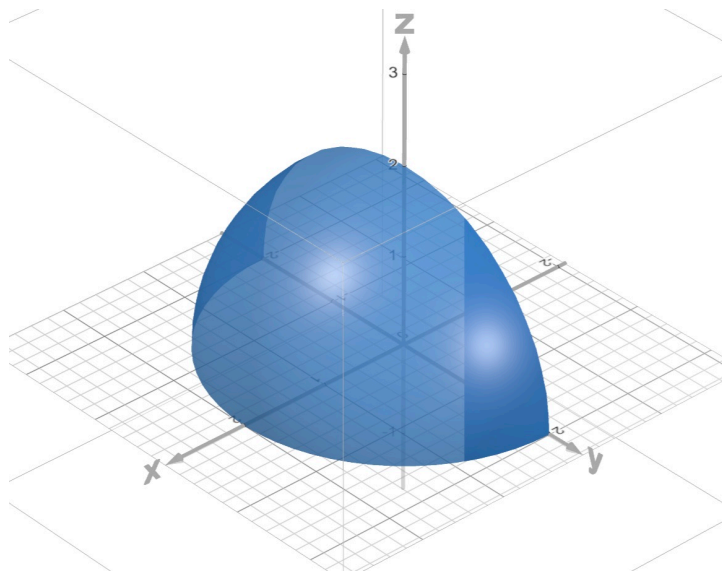
- $\rho = 2$
- $2 \cos \theta \geq 0 \implies \theta \in [0, \pi/2]$
- $\begin{cases} 2 \sin \theta \cos \varphi \geq 0 \\ \theta \in [0, \pi/2] \end{cases} \implies \varphi \in [0, \pi/2] \cup [3/2\pi, 2\pi] \quad \text{o, analogamente (e più semplicemente)} \\ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

Dunque, una parametrizzazione di S è data da

$$\Psi: [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \longmapsto (2 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta)$$

(I bound su φ e θ erano anche facilmente intuibili dal disegno di S , giacché si tratta della superficie della semisfera di raggio 2, centrata in $(0,0,0)$, nel primo e quarto ottante).



Poi: $d\sigma = \|\Psi_\varphi \times \Psi_\theta\| = \|\Psi_\varphi\| \cdot \|\Psi_\theta\| = 4 \sin \theta$
 $\uparrow$
 $\langle \Psi_\varphi, \Psi_\theta \rangle = 0$ Check!
check!

Dunque:

$$\begin{aligned} \text{massa}(S) &= \int_S x \, d\sigma \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le coordinate del centro di massa.

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{4\pi} \int_S x^2 \, d\sigma \\ &= \frac{16}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi \quad \text{--- } \overbrace{\quad}^{\pi/4} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= u \\ -\sin\theta &= du \end{aligned} \quad \Bigg| \quad = 2 \int_0^1 (1-u^2) du = \frac{4}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{4\pi} \int_S xy \, d\sigma = 0$$

↑
disparità in y

+
simmetria del dominio rispetto al piano xz ($y=0$)

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{1}{4\pi} \int_S xz \, d\sigma \\ &= \frac{16}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\leadsto CM = (4/3, 0, 8/3\pi)$$

ESERCIZIO 4

Calcolare l'integrale curvilineo della 1-forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2(x+y)x dx + 2(x+y)y dy$$

lungo la curva η , descritta in polari come grafico di

$$\rho(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

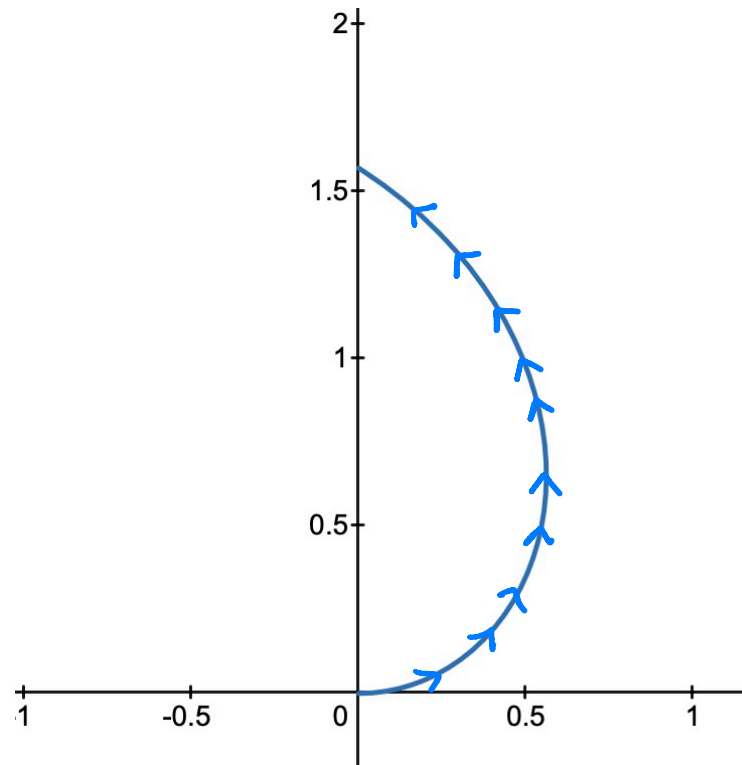
Soluzione

$$x = \rho(\theta) \cos \theta; \quad y = \rho(\theta) \sin \theta$$

$$\eta(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta),$$

$$\eta'(\theta) = (\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta),$$

$$\theta \in [0, \pi/2].$$



$$\begin{aligned}
 \bullet \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi/2} \omega(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} [(\theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin \theta \cos \theta)(\cos \theta - \theta \sin \theta) + (\theta^2 \cos \theta \sin \theta + \theta^2 \sin^2 \theta)(\sin \theta + \theta \cos \theta)] d\theta \\
 \text{conti...} &= 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \theta^2 \cos \theta d\theta}_{\text{ii } I_1} + 2 \underbrace{\int_0^{\pi} \theta^2 \sin \theta d\theta}_{\text{ii } I_2} = (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet I_1 &= \theta^2 \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int \theta \sin \theta \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{parti} \\
 &\quad \downarrow \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \left(-\cancel{\theta \cos \theta} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \left(+\sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - 2(+1) = \frac{\pi^2}{4} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet I_2 &= -\cancel{\theta^2 \cos \theta} \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} \theta \cos \theta d\theta \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{parti}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 &= 2 \left(\theta \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \right) \\
 & \downarrow \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{2} + \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \\
 & \downarrow \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi - 2
 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow (*) = \frac{\pi^2}{2} - 4 + 2\pi - 4 = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 8.$$

ESERCIZIO 5

Calcolare $\iiint_{\overline{B(0,1)}} z \sin^2(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy dz$

dove $B(0,1)$ è la palla di $\mathbb{R}^3$ centrata in $(0,0,0)$, di raggio 1, rispetto alla metrica euclidea.

Soluzione

$f := z \sin^2(\sqrt{x^2+y^2})$ è dispari risp. z , ie $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$.

Inoltre: $(x,y,z) \in \overline{B(0,1)} \iff (x,y,-z) \in \overline{B(0,1)}$.



$$\iiint_{\overline{B(0,1)}} z \sin^2(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy dz = 0.$$

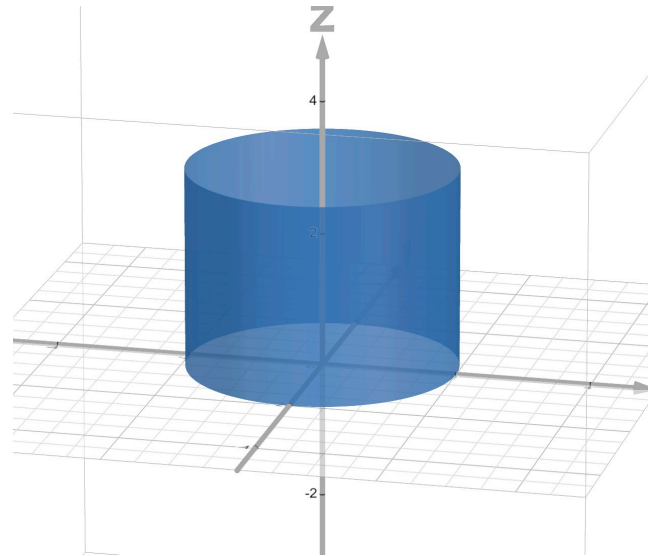
ESERCIZIO 6

Sia $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$, e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0, z \leq 3\}$.
Calcolare, in due diversi modi, il flusso di F uscente da ∂S .

Soluzione

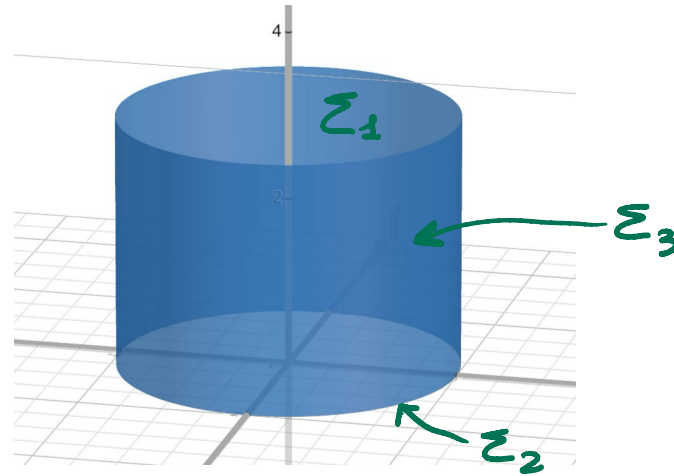
•) Teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\ &= 4 - 4y + 2z. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iiint_S \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_S (4 - 4y + 2z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 4 \operatorname{vol}(S) - 4 \iiint_S y \, dx \, dy \, dz + 2 \iiint_S z \, dx \, dy \, dz \\ \text{cilindriche} \quad &= 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \pi - 4 \left(\int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta \right) dz \right) + 2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 z \rho \, dz \right) d\rho \right) d\theta \right) \\ &= 48\pi - 4 \cdot 3 \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 + 2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 \\ &= 48\pi + 4\pi \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = 48\pi + 36\pi = 84\pi \end{aligned}$$

•) Calcolo diretto $\partial S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$



i) Σ_1 . $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$. Parametrizzazione: $\varphi_1: [0, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
ie $\Sigma_1 = \varphi_1([0, 2] \times [0, 2\pi])$. $(p, \theta) \longmapsto (p \cos \theta, p \sin \theta, 3)$

$$\rightsquigarrow \int_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma_1 = 9 \int_{\Sigma_1} d\sigma_1 = 9 \text{Area}(\Sigma_1) = 9 \cdot 4\pi = 36\pi.$$

ii) Σ_2 . $\vec{n}_2 = (0, 0, -1)$. Parametrizzazione: $\varphi_2: [0, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
ie $\Sigma_2 = \varphi_2([0, 2] \times [0, 2\pi])$. $(p, \theta) \longmapsto (p \cos \theta, p \sin \theta, 0)$

$$\rightsquigarrow \int_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_2 d\sigma_1 = 0 \cdot \int_{\Sigma_1} d\sigma_1 = 0$$

iii) Σ_3 . Parametrizzazione: $\varphi_3: [0, 3] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(z, \theta) \longmapsto (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$

ie $\Sigma_3 = \varphi_3([0, 3] \times [0, 2\pi])$.

$$\varphi_{3\theta} = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$$

$$\varphi_{3z} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}_{3\pm} = \pm \frac{\varphi_{3\theta} \times \varphi_{3z}}{\|\varphi_{3\theta} \times \varphi_{3z}\|} = \pm \frac{(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)}{2} = \pm (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

check!

Vogliamo quella uscente $\Rightarrow \vec{n}_3 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$$d\sigma_3 = \|\varphi_{3\theta} \times \varphi_{3z}\| d\theta dz = 2 d\theta dz.$$

$$\begin{aligned} \leadsto \int_{\Sigma_3} F \cdot \vec{n}_3 d\theta dz &= 2 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (8\cos\theta, -8\sin^2\theta, z^4) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0) d\theta dz \\ &= 2 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (8\cos^2\theta - 8\sin^3\theta) d\theta dz \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 8 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^3\theta) d\theta \\ &= 48 [\pi - 0] = 48\pi \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma_i} F \cdot \vec{n}_i d\sigma_i = 36\pi + 0 + 48\pi = 84\pi.$$